УДК 621.396

Д.П. БЕЛОЗЁРОВ, м.н.с., Институт ионосферы, Харьков
Т.А. СКВОРЦОВ, д-р техн. наук, с.н.с., Институт ионосферы, Харьков

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ НЕКОГЕРЕНТНО РАССЕЯННОГО ИОНОСФЕРОЙ СИГНАЛА

Розглядається можливість використання марківської моделі випадкового процесу для імітування розсіяного іоносферою сигналу в приймачі радіолокатора некогерентного розсіяння.

Рассматривается возможность использования марковской модели случайного процесса для имитирования рассеянного ионосферой сигнала в приемнике радиолокатора некогерентного рассеяния.

The possibility of using a Markov model to simulate the stochastic process of the scattered signal in the ionosphere incoherent scatter radar is considered.

Введение. Одним из методов исследования ионосферы является метод некогерентного рассеяния (НР) [1]. Его суть заключается в том, что высокопотенциальный радиолокатор облучает ионосферу, а на выходе приемника наблюдается сигнал, рассеянный на пространственных неоднородностях электронной концентрации. Рассеянный сигнал на выходе приемника является стохастическим процессом, близким к нормальному.

Параметры ионосферы (температура электронов и ионов, концентрация электронов, скорость дрейфа плазмы) определяются путем корреляционного или спектрального анализа данного процесса.

При этом обратная задача рассеяния решается путем сравнения измеренных автокорреляционных функций (АКФ) с эталонными АКФ и выбора оптимальной оценки АКФ по критерию наименьших квадратов.

Поскольку эталонные АКФ получаются путем решения прямой задачи рассеяния при заданных параметрах ионосферы, с учетом влияния аппаратурных факторов и методических погрешностей, то по оценке АКФ можно найти оценки соответствующие оценки параметров ионосферы.

Для получения достоверной информации приходится решать две задачи:

– контроль аппаратурных факторов в ходе сеансов измерений;

– оценка методических погрешностей, связанных с несовершенством алгоритмов, влиянием помех и временными ограничениями объема анализируемой выборки.

Обе задачи могут решаться путем использования имитаторов сигналов НР. При этом сигналы, имитирующие реальные принимаемые сигналы радиолокатора, могут подаваться в различные точки приемного тракта, включая вход коррелометра.

В настоящее время в Институте ионосферы (г. Харьков) применяется аналоговый имитатор сигнала НР в виде "окрашенного" белого шума [2, 3]. Недостатками такого имитатора являются: невозможность варьировать параметрами имитационного сигнала в реальном времени, когда требуется протестировать радиолокатор НР в ходе сеанса измерений, трудность перестройки фильтров аналогового имитатора для моделирования различных параметров ионосферной среды; изменение статистических характеристик имитационного сигнала в результате старения электронных элементов.

Для устранения вышеперечисленных недостатков целесообразно использовать цифровые имитаторы сигнала НР.

Известно, что для моделирования случайных процессов можно использовать метод формирующего фильтра либо метод канонических разложений [4].

Достоинством метода канонических разложений является возможность вычислений процесса для любого момента времени. Однако принимаемый сигнал в радиолокаторах НР квантуется во времени, что аннулирует указанное достоинство.

В то же время достоинствами метода формирующего фильтра является существенно более высокое быстродействие, а также простота реализации. Эти достоинства оказываются весьма полезными с учетом необходимости формирования сложных моделей ионосферы [5], а особенно при имитации сигнала в ходе сеанса измерений.

Для синтеза сигнала методом формирующего фильтра целесообразно использовать теорию синтеза марковских процессов с заданными корреляционными свойствами [6].

Целью работы является рассмотрение возможности применения марковских моделей для имитации сигнала НР.

Разработка и обоснование методики моделирования. Известно, что спектры марковских процессов описываются дробно-рациональной функцией вида

$$s_{\lambda}(\omega) \sim \frac{|P_m(j\omega)|^2}{|Q_n(j\omega)|^2}, \tag{1}$$

где $P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} +\ldots+ b_{m-1}x + b_m$, $Q(x) = x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+ a_{n-1}x + a_n$, причем все корни многочлена $Q(x)$ имеют отрицательные вещественные части.

Процесс с таким спектром может быть получен из белого нормального шума путем его обработки в соответствии со стохастическим дифференциальным уравнением вида [6]

$$\frac{d^n\lambda(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\lambda(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{d\lambda(t)}{dt}+a_n\lambda(t)=b_0\frac{d^m n(t)}{dt^m}+\ldots+b_m n(t), \qquad (2)$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум, и его производные вводятся чисто формально, так как он не дифференцируем.

В то же время спектр сигнала НР имеет вид [7, 8]

$$s_N(\theta)\sim\frac{\sqrt{\frac{m_{i1}}{2KT_i}}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\sqrt{\frac{m_{in}}{m_1}}e^{-\frac{m_{in}}{m_{i1}}\theta^2}}{\left[1+\beta\left(1-\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\varphi\left(\sqrt{\frac{m_{in}}{m_{i1}}}\theta\right)\right)\right]^2+\pi\beta^2\theta^2\left(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\sqrt{\frac{m_{in}}{m_{i1}}}e^{-\frac{m_{in}}{m_{i1}}\theta^2}\right)^2}, \qquad (3)$$

где r_e – радиус электрона, N_e – электронная концентрация,

$\beta=\frac{T_e}{T_i}$ – отношение температур электронов и ионов, $\theta=\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{m_i}{2KT_i}}$,

$\Phi=2\theta e^{-\theta^2}\int_0^\theta e^{\rho^2}d\rho$, $\gamma_1=\frac{[\mathrm{H}^+]}{N_e}$, $\gamma_2=\frac{[\mathrm{He}^+]}{N_e}$, $\gamma_3=\frac{[\mathrm{O}^+]}{N_e}$, $\gamma_N=\frac{[\mathrm{NN}^+]}{N_e}=1-\gamma_1-\ldots-\gamma_{N-1}$,

m_i – масса ионов в атомных единицах массы, k – волновое число, K – постоянная Больцмана.

Таким образом, для получения марковской модели сигнала НР необходимо аппроксимировать спектр (3) выражением вида (1).

Такая аппроксимация была получена путем разложения числителя и знаменателя (3) в ряды Тейлора. При этом выражение теоретического спектра (3) аппроксимируется формулой вида

$$S(\omega)\approx\frac{\left[1+\sum_{i=1}^{l}(-1)^i\frac{\omega^{2i}}{\prod_{j=1}^{i}2j}\right]^2}{\left[1+\upsilon\left(1+\sum_{i=1}^{l}(-1)^i\frac{2^i\omega^{2i}}{\prod_{j=1}^{i}(2j-1)}\right)\right]^2+\upsilon^2\pi\left[\omega+\sum_{i=1}^{l}(-1)^i\frac{\omega^{2i+1}}{i!}\right]^2}, \qquad (4)$$

где i, j – индексы (целые положительные числа), $n = 2l + 1$, здесь n – это порядок полинома, характеризующего знаменатель, υ – коэффициент, выбираемый из ширины спектра.

Отметим, что в известной литературе описаны марковские модели только для спектров достаточно простого вида. В то же время характерный спектр сигнала НР имеет двугорбый характер. Это может создавать известные проблемы с устойчивостью марковских моделей сигнала НР при увеличении степени знаменателя. Однако достаточно высокая точность аппроксимации может быть достигнута уже при малых степенях путем правильного выбора коэффициента υ.
В частности, при $l = 1$ (4) принимает вид

$$S(\omega)=\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)^2}{(1+\upsilon-2\upsilon\omega^2)^2+(\upsilon\sqrt{\pi}\omega-\upsilon\sqrt{\pi}\omega^3)^2}, \tag{5}$$

при этом расхождение спектра (3) и его аппроксимации (5) находятся в пределах 1– 3%.

Перейдем от линейного дифференциального уравнения n-порядка (2) к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначим $\lambda(t) = \lambda_1(t)$ и введем дополнительно $n - 1$ функций $\lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ при помощи системы следующих равенств

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt}=\lambda_2(t), \\ \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt}=\lambda_3(t), \\ \ldots \\ \dfrac{d\lambda_{n-m-1}(t)}{dt}=\lambda_{n-m}(t), \\ \dfrac{d\lambda_{n-m}(t)}{dt}=\lambda_{n-m+1}(t)+\xi_{n-m}n(t), \\ \ldots \\ \dfrac{d\lambda_{n-1}(t)}{dt}=\lambda_n(t)+\xi_{n-1}n(t). \end{cases} \tag{6}$$

Постоянные коэффициенты $\xi_{n-m}, \ldots , \xi_{n-1}$ выбираются таким образом, чтобы из уравнения (2) исключить производные белого шума $n(t)$. Для этого подставим в (2) выражения в виде производных, полученных из (6). В результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{d\lambda_n(t)}{dt}+a_n\lambda_1(t)+a_{n-1}\lambda_2(t)+\ldots+a_1\lambda_n(t)+\xi_{n-m}\frac{d^m n(t)}{dt^m}+(\xi_{n-m+1}+a_1\xi_{n-m})\frac{d^{m-1}n(t)}{dt^{m-1}}+ \\ &+\ldots+(\xi_{n-1}+a_1\xi_{n-2}+\ldots+a_{m-1}\xi_{n-m})\frac{dn(t)}{dt}+(a_1\xi_{n-1}+a_2\xi_{n-2}+\ldots+a_m\xi_{n-m})n(t)= \\ &=b_0\frac{d^m n(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}n(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dn(t)}{dt}+b_m n(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Приравнивая коэффициенты у одинаковых производных от $n(t)$ в левой и правой части написанного равенства, получаем рекуррентную формулу для определения коэффициентов ξ_k:

$$\xi_j = b_{j+m-n} - \sum_{i=1}^{j+m-n} a_i \xi_{j-i}. \tag{8}$$

При этом уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d\lambda_n(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}\lambda_i(t) + \xi_n n(t). \tag{9}$$

Система из n линейных дифференциальных уравнений (6) и (9) является системой, определяющей n-компонентный марковский процесс:

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} = \lambda_2(t), \\ \dots \\ \dfrac{d\lambda_{n-m-1}(t)}{dt} = \lambda_{n-m}(t), \\ \dots \\ \dfrac{d\lambda_{n-m}(t)}{dt} = \lambda_{n-m+1}(t) + \xi_{n-m} n(t), \\ \dfrac{d\lambda_n(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_{n+1-i}\lambda_i(t) + \xi_n n(t). \end{cases} \tag{10}$$

При $n - m = 1$, система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} = \lambda_2(t) + \xi_1 n(t), \\ \dots \\ \dfrac{d\lambda_{n-m}(t)}{dt} = \lambda_{n-m+1}(t) + \xi_{n-m} n(t), \\ \dfrac{d\lambda_{n-1}(t)}{dt} = \lambda_n(t) + \xi_{n-1} n(t), \\ \dfrac{d\lambda_n(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_{n+1-i}\lambda_i(t) + \xi_n n(t). \end{cases} \tag{11}$$

Сравнивая (1) и (5), можно определить коэффициенты системы уравнений (11) в виде

$$b_0 = \frac{1}{2},\ b_2 = 1,$$

$$a_0 = \frac{\upsilon\sqrt{\pi}}{\upsilon\sqrt{\pi}} = 1,\ a_1 = \frac{2\upsilon}{\upsilon\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}},\ a_2 = \frac{\upsilon\sqrt{\pi}}{\upsilon\sqrt{\pi}} = 1,\ a_3 = \frac{1+\upsilon}{\upsilon\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, система (11) приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} = \lambda_2(t) + \xi_1 n(t), \\ \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt} = \lambda_3(t) + \xi_2 n(t), \\ \dfrac{d\lambda_3(t)}{dt} = -a_3\lambda_1(t) - a_2\lambda_2(t) - a_1\lambda_3(t) + (b_2 - a_1 b_1 - a_1^2 b_0 - a_2 b_0) n(t), \end{cases} \tag{12}$$

где $\xi_1 = b_0$, $\xi_2 = b_1 - a_1 b_0$.

Наконец, для реализации фильтра в цифровом виде переходим от дифференциальных уравнений (12) к их разностному аналогу:

$$\begin{cases} \lambda_1(t_{i+1}) = \lambda_1(t_i) + \Delta t(\lambda_2(t_i) + b_0 n(t_i)), \\ \lambda_2(t_{i+1}) = \lambda_2(t_i) + \Delta t(\lambda_3(t_i) + (b_1 - a_1 b_0) n(t_i)), \\ \lambda_3(t_{i+1}) = \lambda_3(t_i) + \Delta t(-a_3\lambda_1(t_i) - a_2\lambda_2(t_i) - a_1\lambda_3(t_i)) + \\ \qquad + \Delta t(b_2 - a_1 b_1 - a_1^2 b_0 - a_2 b_0) n(t_i). \end{cases} \tag{13}$$

Результаты моделирования. В соответствии с процедурой вычислений (13) была разработана программа, которая позволяет генерировать случайный процесс.

При реализации данной программы в качестве генератора белого гауссовского шума $n(t)$ использовался программный генератор, который вырабатывал случайную выборку некоррелированных отсчетов в диапазоне от -1 до $+1$ с дискретностью 10^{-5}, что вполне достаточно для адекватного моделирования сигнала НР.

Оценка работы программы показала ее достаточную эффективность. При большом количестве реализаций (не менее 10^4) среднеквадратическое отклонение АКФ модели сигнала от теоретической АКФ составляет $\delta \approx 0.0007$.

Дисплей имитатора сигнала НР представлен на рисунке. Вверху справа отображается одна из реализаций случайного процесса. Вверху слева показан вид спектра моделируемого сигнала при υ = 3, который в масштабе данного изображения практически совпадает с аппроксимируемым спектром. Внизу отображается заданная АКФ, полученная путем Фурье-преобразования заданного спектра, а также АКФ сгенерированного процесса.

Последняя АКФ формировалась для оценки качества моделирования. При этом многократно генерировался ансамбль случайных процессов (100, 1000, 10000 реализаций) и вычислялась АКФ данного ансамбля. Как видно в масштабе рисунка обе АКФ практически совпадают.

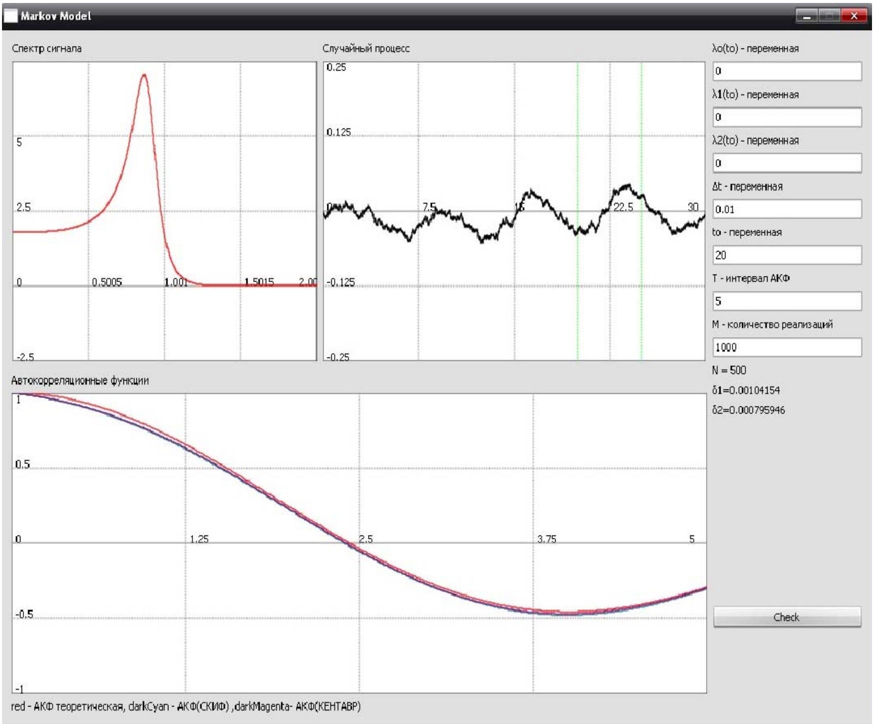

Рис. – Дисплей имитатора сигнала НР

Обсуждение. Теория построения имитаторов сигналов НР постоянно развивается, что подтверждает растущую актуальность рассматриваемых вопросов. При этом все шире используется компьютерное моделирование. В частности, в работе [9] описана модель, построенная методом канонических разложений в базисе Фурье.

Дальнейшее приближение модели к реальному сигналу требует использования матричных моделей сигнала НР [5, 10].

В этой ситуации объем вычислений резко возрастает, что делает актуальными вопросы быстродействия имитаторов и их простоты.

В этих условиях целесообразно переходить при имитации сигнала НР от использования разложений в базисе Фурье к использованию марковских моделей.

Действительно, при канонических разложениях вида [9] необходимо применять большое количество генераторов гармоник (более 100), начальные фазы которых задаются источниками “белого шума”. Затем необходимо реализовать суммирование гармоник и квантование процесса во времени.

В то же время для компьютерной модели, приведенной в статье достаточно использовать всего лишь систему из трех разностных уравнений и один источник белого шума.

Выводы. Разработана математическая марковская модель стохастического сигнала, которая позволяет имитировать сигнал НР с высокой точностью. Получено выражение, аппроксимирующее теоретический спектр сигнала НР дробно-рациональной функцией при помощи полинома Тейлора. Создана компьютерная программа, которая позволяет формировать нормальный случайный процесс со спектром и АКФ, соответствующими спектру и АКФ сигнала НР с заданными параметрами.

Список литературы: **1.** *Таран В.И.* Исследование ионосферы с помощью радаров некогерентного рассеяния в Харькове // Вестник Харьковского государственного политехнического университета: Сб. научн. трудов. – 1999. – Вып. 31. – С. 3 – 9. **2.** *Лысенко В.Н*., *Капустян А.А., Бруско А.В.* Имитация НР-сигнала // Вестник Харьковского политехнического института: Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния. – 1986. – Вып. 4, № 234. – С. 60 – 63. **3.** *Скляров И.Б.* Устройство формирования контрольного сигнала радара НР // Вестник ХГПУ: Радиофизика и ионосфера. – 1999. – Вып. 7, Ч. 3. – С. 374 – 375. **4.** *Бакалов В.П.* Цифровое моделирование случайных процессов. – М.: Сайнс-пресс, 2002. – 88 с. **5.** Патент України на корисну модель № 58663, МПК (2011.01) G01S 13/00. Спосіб імітації некогерентно розсіяного іоносферою сигналу / *Д.П. Бєлозьоров, Є.В. Рогожкин, Т.О. Скворцов, А.В. Фисун*; власник Інститут іоносфери НАН та МОН України – № u201009678; заявл. 02.08.2010; опубл. 26.04.2011; Бюл. №8. **6.** *Миронов М.А.*, *Тихонов В.И.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с. **7.** *Рогожкин Е.В.* Измерение параметров ионосферной плазмы по корреляционной функции сигнала некогерентного рассеяния // Ионосферные исследования. – М.: Сов. Радио, 1979. – № 27. – С. 46 – 59. **8.** *Гринченко С.В.* Оптимальный алгоритм многократных вычислений теоретических характеристик некогерентно рассеянного сигнала // Вестник ХГПУ: Физические аспекты современных технологий. – 2000. – Вып. 103. – С. 331 – 336. **9.** *Пуляєв В.О., Богомаз О.В.* Імітація сигналів некогерентного розсіяння з урахуванням висотного розподілу іоносферних параметрів, динаміки плазми та завадових складових // Космічна наука і технологія. – 2011. – Т. 17, № 5. – С. 24 – 28. **10.** *Рогожкин Е.В., Пуляев В.А., Лысенко В.Н.* Зондирующие сигналы для исследования ионосферы методом НР: монография. – Х.: НТУ “ХПІ”, 2008. – 256 с.

Поступила в редколлегию 15.08.2012